



# Bazele reglării automate

- I. PROCESE SI SISTEME
- II. RASPUNSUL LA MARIMI DE INTRARE STANDARD
- III. SISTEME DE REGLARE AUTOMATA
- IV. REGULATOARE

Bibliografie admitere master, an universitar 2020-2021, pentru [programele de master coordonate de Departamentul AII:](#)

Automatica si Informatica Industriala (AII)  
Managementul si Protectia Informatiei (MPI)  
Robotics and Automation (RA)  
Prelucrari Complexe de Semnal in Aplicatii Multimedia (PCSAM)  
Sisteme Informatice in Medicina (SIM)  
Service Engineering and Management (SEM)



## 1. Procese și sisteme [1,3,5,16]

Procesul și sistemul, noțiuni fundamentale în fizică, își găsesc o explicație și încadrare riguroasă la nivelul termodinamicii, disciplină care se ocupă cu studiul relațiilor dintre diversele forme ale energiei. De obicei, principiile termodinamicii sunt formulate referitor la un anumit sistem (fizic) bine definit. Un **sistem termodinamic** este un ansamblu care poate interacționa cu mediul înconjurător cel puțin pe două căi, dintre care una trebuie să fie un transfer de căldură. Unui astfel de sistem  $i$  se poate delimita un *interior*, conținând un număr oarecare de corpuri macroscopice cu o structură (fizică) continuă, și un *exterior*. **Starea** unui astfel de sistem se descrie printr-un set de parametri (fizici) ce caracterizează *situația din interior și interacțiunile cu exteriorul*. Se numește **proces fizic** (macroscopic) tranziția unui sistem termodinamic dintr-o stare în alta.

Într-un limbaj tehnic aplicativ prin noțiunea de sistem (tehnic) se înțelege un ansamblu de elemente componente fizico-tehnice, care acționează unele asupra altora într-un mod bine determinat (figura 1.1).

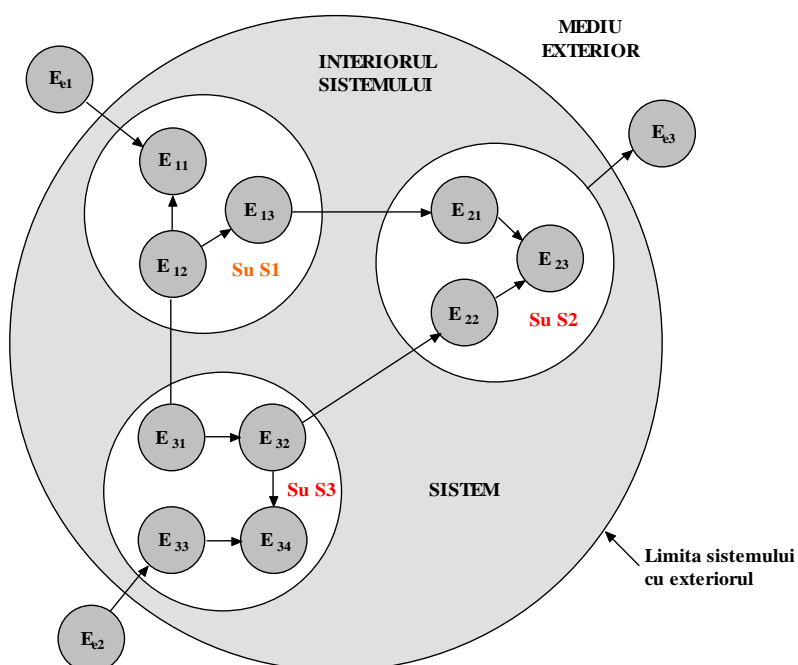


Fig. 1.1. Sistem (tehnic):  $E_{ij}$  – element constituent al sistemului;  $Su S_k$  - subsistemul  $k$

Un exemplu de sistem (tehnic) este sistemul electroenergetic (SEE). Acesta este constituit din elemente generatoare de energie electrică, transformatoare, linii electrice, transport și echipamente de distribuție a energiei electrice. Aceste elemente sunt grupate zonal constituind subsistemele unui SEE. Referitor la un SEE dat, de exemplu SEE românesc, acestui SEE  $i$  se poate asocia un interior și un exterior, delimitarea dintre aceste zone, făcându-se printr-o graniță (figura 1.1 ; figura 1.2).

În același sens, **procesul industrial**, ca ansamblu de fenomene de natură complexă, concepute, de regulă, de către om cu o destinație funcțională precisă, explicitează transformările masice și / sau de energie și de informații.

Vom asocia unui proces industrial o reprezentare de tipul celei din figura 1.3, în care s-au notat prin  $E_i$  fluxurile de energie, materii prime, materiale și informații (introduse) transmise procesului, respectiv prin  $E_e$  fluxurile de energie, materiale, produse finite sau informații extrase din proces.

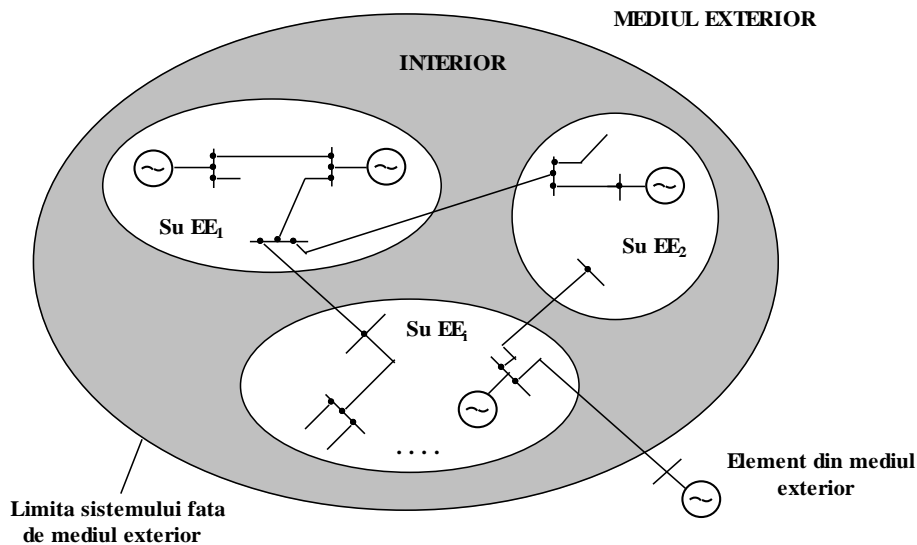


Fig. 1.2. Sistem electroenergetic (SEE):  $Su EE_i$  subsistemul electroenergetic "i"

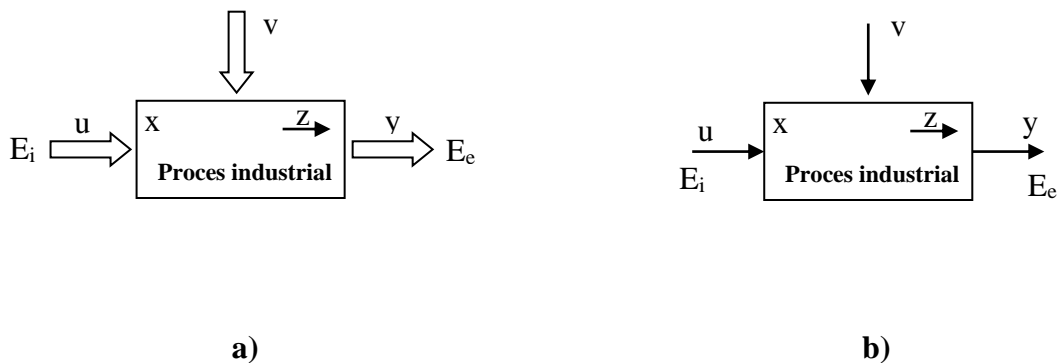


Fig. 1.3 – Reprezentarea unui proces industrial sub formă de schemă bloc  
Sistem cu mai multe intrări și mai multe ieșiri (MIMO);  
Sistem cu o intrare și o ieșire (SISO)

Mărimile fizice ce caracterizează fenomenele din sistemul tehnic le vom numi **semnale**. Variația lor în timp conține pentru beneficiarul instalației o anumită semnificație, deci ele sunt purtătoare de informații.

În aplicațiile industriale semnalele servesc pentru influențarea lui  $E_i$  și  $E_e$ . O clasificare a semnalelor ce cuprinde demersurile noastre teoretice ulterioare e dată în tabela 1.1 iar o clasificare a lor după amplitudine și timp în tabela 1.2.

De o deosebită importanță în abordarea sistemică a unui proces, atât în faza de analiză, cât și în, faza de proiectare este stabilirea relațiilor funcționale între mărimile de intrare și cele de ieșire, relații ce permit descrierea comportării sistemului în regim dinamic și staționar. Pentru procese (sisteme) fizice realizabile aceste relaționari se pot obține prin legi fizice sau de altă natură sau prin măsuratori. Pe baza acestor elemente se determină **modelul matematic** al procesului. Acesta poate fi reprezentat de ecuații algebrice, diferențiale, liniare sau cu derivate parțiale, logice sau cu diferențe finite. Tipologia sistemelor – liniare/nelineare, deterministe/stochastice, continue/discrete în timp, cu parametri concentrați/parametrii distribuiți, invariante/variabile în timp – determină forma sub care se va exprima modelul matematic.

Tabela 1.1 - Semnale test utilizate frecvent în automată

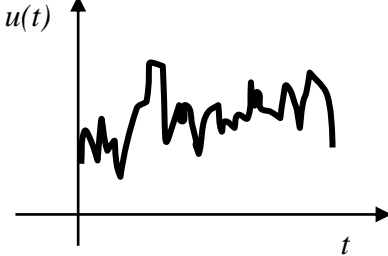
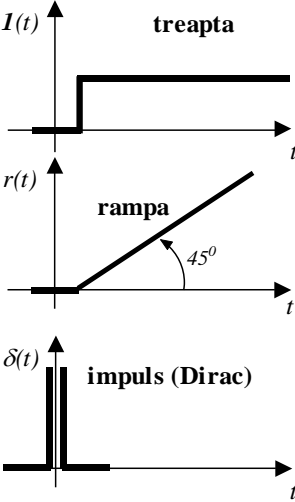
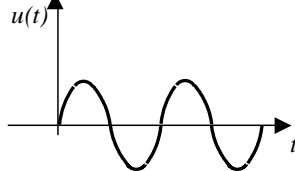
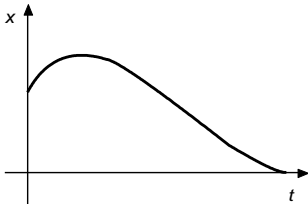
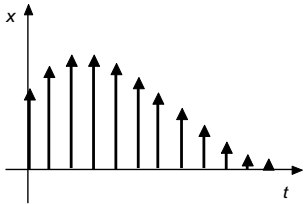
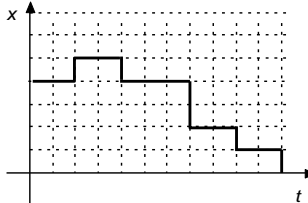
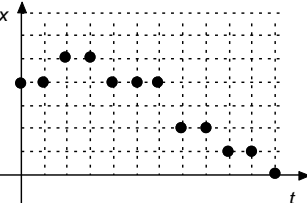
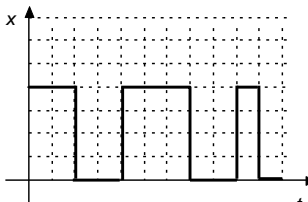
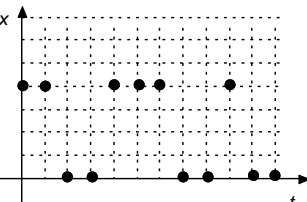
Determinate	Stochastic
<ul style="list-style-type: none"> <li>• pot fi descrise analitic <math>x=f(t)</math></li> <li>• caracterizează fenomenele reproductibile prin relații analitice</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• nu pot fi descrise analitic</li> <li>• caracterizează fenomenele aleatoare descrise prin legi probabilistice</li> </ul>
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>neperiodice</i></li> </ul>	
	
<ul style="list-style-type: none"> <li>• <i>periodic armonic</i></li> </ul>	
	

Tabela 1.2 - Tipuri de semnale

Amplitudine (x) \ Timp (t)	Timp continuu	Timp discret
Amplitudine continuă	<p>A. Sisteme continue</p> 	<p>B. Sisteme cu eșantionare</p> 
Amplitudine discretă	<p>C. Sisteme tip releu</p> 	<p>D. Sisteme de reglare numerice</p> 
Amplitudine binară	<p>E. Sisteme de comutare binară</p> 	<p>F. Sisteme de comandă digitale</p> 

Pentru un sistem dinamic  $\Sigma$  și un set de întrebări  $B$  privitoare la comportarea acestuia, trebuie să se găsească o reprezentare  $M$  care să poată să răspunda acestor întrebări, atunci  $M$  este un model.

O formulare făcută dintr-un alt punct de vedere o găsim în [19].

**Modelul** este o reprezentare a aspectelor esențiale ale unui sistem existent (sau ale unui sistem ce urmează a fi construit), care prezintă cunoștințele asupra acestui sistem sub o forma utilizabilă.

### 1.1. Descrierea sistemelor liniare continue în domeniul frecvenței. Funcția de transfer. Interpretări ale noțiunii de funcție de transfer. Reprezentarea în frecvență. [3, 4, 5, 21, 26]

În studiul proceselor (tehnice) se apelează de multe ori la utilizarea transformatei Laplace, o transformare de tip integral ce permite o rezolvare mai ușoară a ecuației sau ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți într-o ecuație sau sistem de ecuații algebrice (figura 1.4).

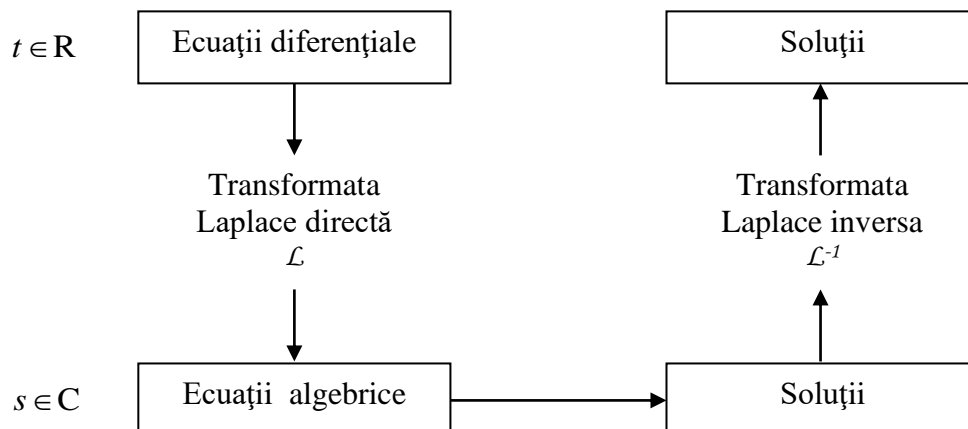


Fig.1.4. Schema de rezolvare a ecuațiilor diferențiale prin transformata Laplace

Se definește o transformată Laplace directă

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \mathcal{L}\{f(t)\} \quad (1.1)$$

și o transformată Laplace inversă

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(s)e^{-st} ds = \mathcal{L}\{F(s)\} \quad (1.2)$$

cu  $f(t)$  – funcția original,  $F(s)$  – funcția imaginară și  $s = \sigma + j\omega$  – variabila complexă

În abordarea proceselor (tehnice) funcția original este în mod obișnuit o funcție de tipul  $t \in \mathbb{R}$ . Variabila complexă  $s$  pe de altă parte conține frecvența (pulsatia)  $\omega$ , ceea ce ne permite să spunem că funcția imaginară  $F(s)$  este o funcție frecvențială. În acest mod

transformata Laplace directă, transformă domeniul timp în domeniul frecvență și acțiunea se petrece invers în cazul transformatei Laplace inverse (figura 1.5)

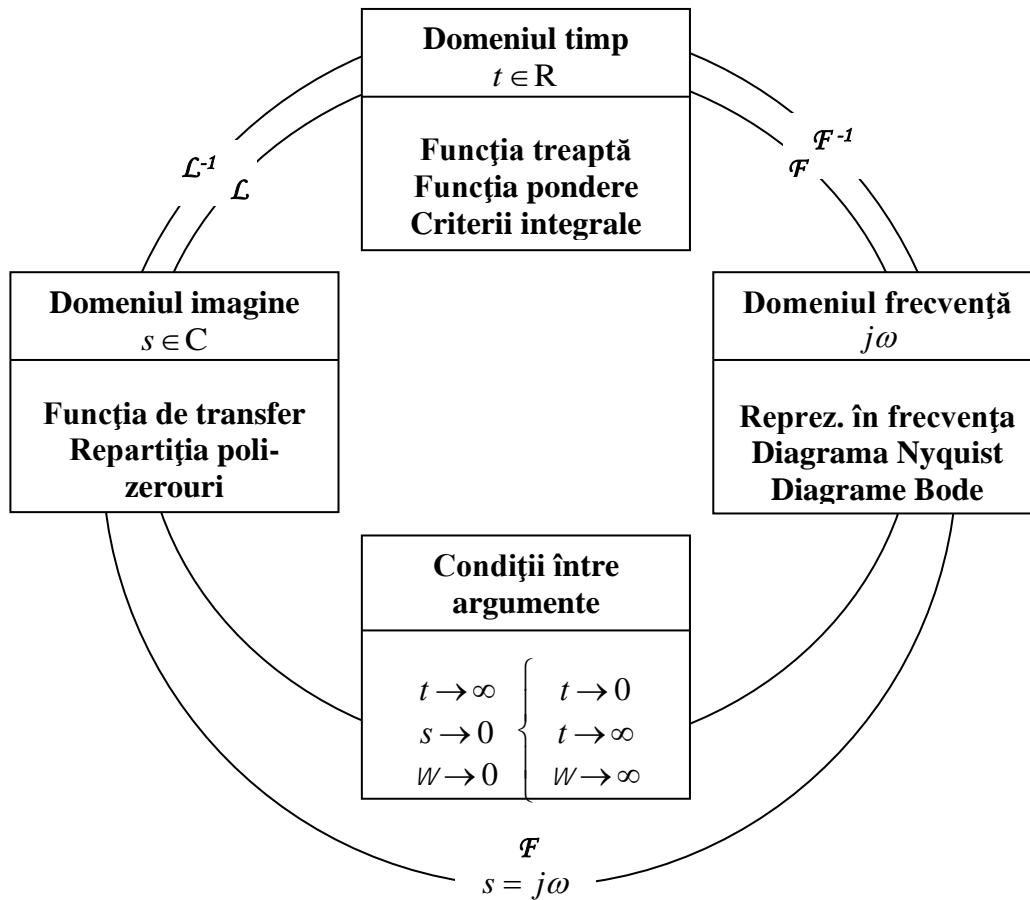


Fig. 1.5. Legătura dintre domeniul timp și domeniul frecvenței

Procesele (tehnice) sunt studiate și printr-o altă transformată de tip integral, transformata Fourier:

$$F(j\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt \quad (1.3)$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}\{F(j\omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \quad (1.4)$$

Făcând o comparație între cele două transformări se poate observa că transformata Fourier a unei funcții  $f(t)$  se obține din imaginea Laplace a acesteia cu  $s = j\omega, \sigma = 0$ .

$F(j\omega)$  fiind funcție complexă se poate scrie:

$$F(j\omega) = \text{Re } F(j\omega) + j \text{Im } F(j\omega) = |F(j\omega)|e^{j \arg F(j\omega)} \quad (1.5)$$

unde  $|F(j\omega)|$  este spectrul Fourier (densitatea spectrală a lui  $f(t)$  iar  $\arg F(j\omega)$  defazajul.

Fiind dat sistemul  $\dot{x} = Ax + bu + ev$  și aplicând transformata Laplace cu condiția  $y = c^T x$

$x_0=0$  se obține:

$$y(s) = c^T (sI - A)^{-1} bu(s) + c^T (sI - A)^{-1} ev(s) \quad (1.6)$$

Relațiile:

$$H(s) \stackrel{\Delta}{=} c^T (sI - A)^{-1} b \quad (1.7)$$

și

$$H_v(s) \stackrel{\Delta}{=} c^T (sI - A)^{-1} e \quad (1.8)$$

definesc **funcția de transfer a sistemului la comandă** și respectiv, **funcția de transfer a sistemului la perturbație**, mai precis **forma primară a funcțiilor de transfer**.

Relațiile (1.7) și (1.8) se pot scrie sub forma :

$$H(s) = \frac{\nu(s)}{\chi(s)}, \quad H_v(s) = \frac{\nu_v(s)}{\chi_v(s)} \quad (1.9)$$

cu  $\chi(s) = \chi_v(s) = \det(sI - A)$ ,  $\nu(s) = c^T (sI - A)^+ b$  și  $\nu_v(s) = c^T (sI - A)^+ e$ , unde cu  $(sI - A)^+$  s-a notat matricea transpusă a complementelor algebrici.

Prin simplificare, din aceste forme primare (1.9) se obțin **formele ireductibile ale funcției de transfer** care au avantajul evidențierii polilor și zerourilor:

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)}, \quad H_v(s) = \frac{r_v(s)}{p_v(s)} \quad (1.10)$$

Dacă se înlocuiesc formele primare (formele ireductibile) (1.9) în (1.6), se obține **ecuația de stare parțială**:

$$\chi(s)y(s) = \nu(s)u(s) + \nu_v(s)v(s) \quad (1.11)$$

Se remarcă că zerourile lui  $\chi(s)$  sunt valorile proprii ale matricei A:

$$\mathfrak{P}[\chi_A(s)] \equiv \sigma(A)$$

În consecință reprezentările  $\dot{x} = Ax + bu + ev$  și (1.11) sunt echivalente.  
 $y = c^T x$

Din (1.6) se observă că:

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} \text{ pentru } v(s) = 0 \quad (1.12)$$

$$H_v(s) = \frac{y(s)}{v(s)} \text{ pentru } u(s) = 0 \quad (1.13)$$

cea ce ne permite să dăm o definiție mai puțin riguroasă (dar operațională în majoritatea aplicațiilor tehnice) pentru funcția de transfer ca fiind raportul dintre transformata Laplace a mărimii de ieșire și transformata Laplace a mărimii de intrare a sistemului, în condiții inițiale nule.

Relațiilor (1.10) precum și (1.12) și (1.13) li se pot asocia reprezentările din figura 1.6.a și b, obținându-se așa-numitele reprezentări intrare-ieșire, respectiv de stare a unui sistem.

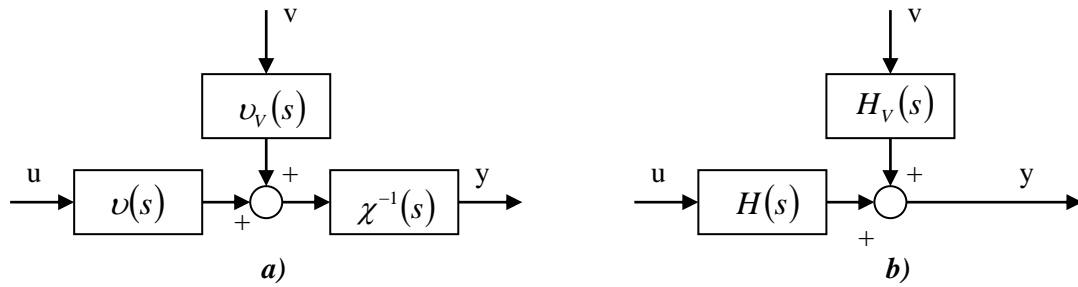


Fig. 1.6 Reprezentări ale sistemului: a) reprezentarea de stare conform cu relațiile (1.1); b) reprezentarea intrare-ieșire conform cu relațiile (1.3) și (1.4)

Din  $H(s) = \frac{b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1}}{a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + a_n s^n}$  se obține că:

$$(a_0 + a_1s + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n)y(s) = (b_0 + b_1s + \dots + b_{n-1}s^{n-1})u(s) \quad (1.14)$$

întrucât gradul polinomului este  $\partial[v(s)] < \partial[\chi(s)] = n$  din condiția de realizabilitate fizică.

**Observații:**

i) Dacă vom considera intrarea unui sistem  $H(s)$  un impuls Dirac, atunci se obține :

$$y(s) = H(s) \cdot \delta(s) = H(s) \cdot 1 = H(s) \quad (1.15)$$

sau

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} = h(s) \quad (1.16)$$

Relația (1.16) definește **răspunsul cauzal la impuls** (impropriu numit și funcție pondere).

Deși funcția Dirac nu există practic, de fapt nici un sistem (tehnic) nu ar suporta o astfel de excitare pe intrare, această interpretare a funcției de transfer prin răspunsul cauzal la impuls sugerează un șoc foarte puternic și scurt ca durată.

ii) Relația (1.12) sau (1.13) ne sugerează o altă interpretare în sensul că funcția de transfer reprezintă raportul transformatei Laplace a oricărei ieșiri pe intrarea care a provocat aceasta ieșire.

iii) Se poate demonstra că funcția de transfer măsoară o amplificarea sistemului. Într-adevăr, dacă considerăm un număr  $\lambda$  care nu este valoare proprie, deci  $\lambda \notin \sigma(A)$  spectrul matricei  $A$  sau  $\det(\lambda I - A) \neq 0$ , se ia  $u(t) = e^{\lambda t}$  și spunem că  $x(t) = (\lambda I - A)^{-1} b e^{\lambda t}$ .

Acest fapt este verificabil cu ecuația de stare  $\dot{x} = Ax + bu$ , iar în aceste condiții

$$y(t) = c^T x(t) = c^T (\lambda I - A)^{-1} b e^{\lambda t} = H(\lambda) \cdot u(t) \quad (1.17)$$

Această interpretare a funcției de transfer poate fi evidențiată în mod intuitiv pe un amplificator electronic (cu reacție rezistivă și impedanța de intrare de asemenea rezistivă) a cărui funcție de transfer coincide cu amplificarea circuitului.

Având în vedere că funcția de transfer reflectă comportarea intrare-ieșire a sistemului, ea poate fi calculată direct din ecuațiile diferențiale ce caracterizează această comportare, deci pe baza definiției mai puțin riguroase.

**Notă:** Vom face o notație forțată folosind pentru funcția imagine tot litera mică ca și pentru funcția original, diferențierea făcându-se după variabila independentă  $s$ , respectiv  $t$ .

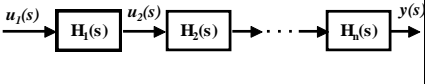
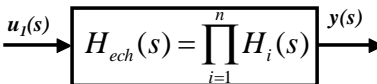
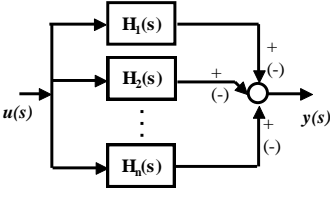
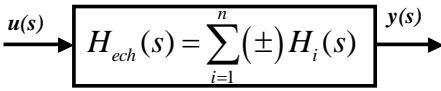
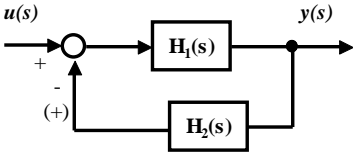
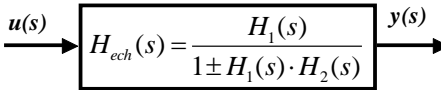
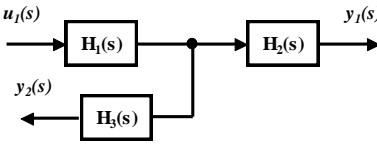
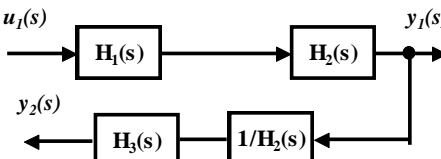
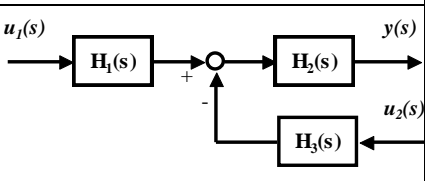
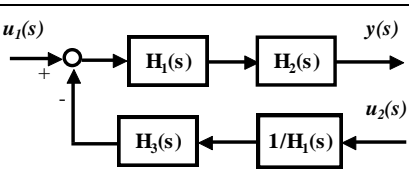
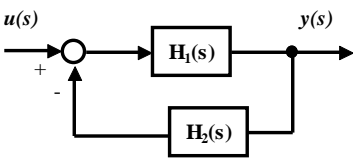
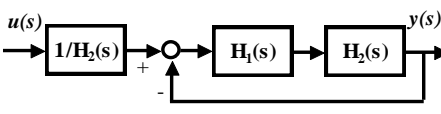
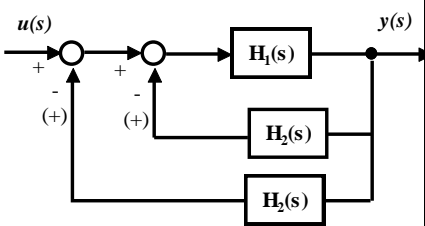
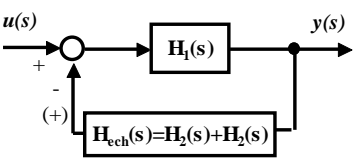


## 1.2. Algebra schemelor bloc [1]

Algebra schemelor bloc constă dintr-un ansamblu de reguli de transfigurare sau simplificare a sistemelor cu bucle multiple reprezentate sub forma de scheme bloc.

Principalele reguli de transfigurare a schemelor bloc sunt date în tabela 1.3.

Tabela 1.3: Reguli principale ale algebrei schemelor bloc

Nr crt	Regula	Schema inițială	Schema echivalentă
1	Legarea în serie (cascadă)		
2	Cuplarea în derivație (paralel înainte)		
3	Cuplarea în buclă (paralel înapoi)		
4	Deplasarea unui punct de ramificație pe direcția acțiunii (spre ieșire)		
5	Deplasarea unui punct de sumare contrar direcției acțiunii (spre intrare)		
6	Rigidizarea unei reacții elastice		
7	Sumarea unor reacții multiple		

## 2. Răspunsul sistemelor la mărimi de intrare standard [1,2,14,28]

### 2.1.1 Considerații generale. Componenta permanentă și tranzitorie a răspunsului unui sistem

În cele ce urmează vom pune în evidență unele particularități ale componentei forțate a răspunsului unui sistem la intrarea standard.

Prin **intrare standard** înțelegem două mari categorii de mărimi de intrare:

- intrări polinomiale:

$$u(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} 1^{-1}(t) \quad (2.1)$$

cu cazurile mai interesante  $r = 1, 2, 3$  (figura 2.1)

- intrări armonice:

$$u(t) = \cos(\omega t), \quad (\text{sau } \sin \omega t, e^{j\omega t}) \quad (2.2)$$

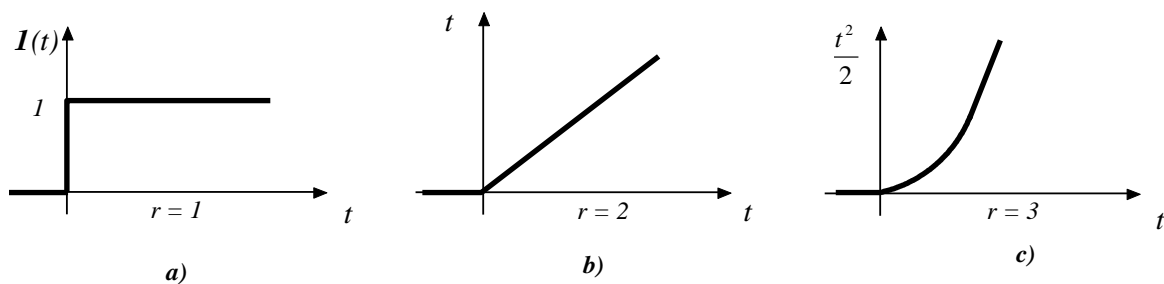


Fig. 2.1. Intrări standard:  
a) treaptă unitară; b) rampă unitară; c) parabolă unitară

### 2.1.2 Răspunsul unui sistem la intrare polinomială

Fie

$$y(s) = H(s) \cdot u(s) \quad (2.3)$$

cu

$$H(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \quad \text{irreductibilă.}$$

Se face următoarea ipoteză de lucru simplificatoare:  $p(0) \neq 0$  și zerourile lui  $p(s)$  sunt simple. Vom considera o intrare treaptă unitară:  $u(s) = \frac{1}{s}$

Dar din (2.3) rezultă:

$$y(s) = \frac{r(s)}{sp(s)} = \frac{r(s)}{s \prod_{i=1}^n (s - p_i)} = \frac{a_0}{s} + \dots + \frac{a_n}{s - p_n} \quad (2.4)$$

cu

$$a_0 = \frac{r(0)}{p(0)} = H(0), \quad a_i = \frac{r(p_i)}{p_i p'(p_i)} \quad (2.5)$$

sau

$$y(t) = H(0) \cdot 1(t) + \sum_{i=1}^n a_i e^{p_i t} 1(t) \quad (2.6)$$

dacă și numai dacă sistemul este strict stabil, adică  $\mathcal{P}[H(s)] \subset \mathbb{C}^-$  și deci  $\text{Re}(p_i) < 0$

Se observă că dacă  $t \rightarrow \infty$

$$y(t) = H(0) \cdot \mathbf{1}(t) + y_p(t) \quad (2.7)$$

În consecință, răspunsul sistemului, mai precis componenta lui forțată, este constituit din doi termeni ce vor fi definiți prin:

$$y(t) = y_f(t) = y_p(t) + y_t(t); \quad x_0 = 0; \quad y_t = 0 \quad (2.8)$$

$y_p$  - **componenta permanentă a răspunsului;**

$y_t$  - **componenta tranzitorie a răspunsului.**

### Observații

1. Descompunerea  $y(t) = y_t + y_p$  este o descompunere generală ce se obține în orice condiții. Descompunerea  $y(t) = y_p + y_t$  nu este generală; ea se obține dacă sistemul este strict stabil și intrarea este dată, cu  $x(0)=0$  ( $y_t = 0$ ).
2. În cazul particular al unui semnal treaptă pe intrare, răspunsul sistemului se mai numește răspuns indicial.
3. Din relația (2.7) se observă că, la semnal treaptă pe intrare,

$$y_p(t) = H(0) = \text{const.} = y_s \quad (2.9)$$

Această mărime,  $y_s$ , definește **regimul staționar**.

*Regimul staționar este un caz particular de regim permanent și anume pentru intrare treaptă.*

În cazul general,

$$u(t) = \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \Rightarrow u(s) = \frac{1}{s^r} \quad (2.10)$$

și în aceleași ipoteze de lucru simplificatoare se obține:

$$y(s) = H(s) \cdot u(s) = \frac{c_0}{s^r} + \frac{c_1}{s^{r-1}} + \dots + \frac{c_{r-1}}{s} + \sum_{i=1}^n \frac{a_i}{s - p_i} \quad (2.11)$$

$$c_j = \frac{1}{j!} \cdot H^{(j)}(0); \quad j = 1, 2, \dots, (r-1); \quad a_i = \frac{r(p_i)}{p_i \cdot p'(p_i)}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$y(t) = \underbrace{c_0 \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + c_1 \frac{t^{r-2}}{(r-2)!} + \dots + c_{r-2} \frac{t}{1!} + c_{r-1}}_{y_p(t)} + \underbrace{\sum_{i=1}^n a_i e^{p_i t}}_{y_t(t)} \quad (2.12)$$

### Exemplificare

Dacă  $r = 2$ , deci  $u(t) = t$ , rezultă:

$$y_p(t) = c_0 t + c_1$$

unde, în general,  $c_1 < 0$  (figura 2.2)

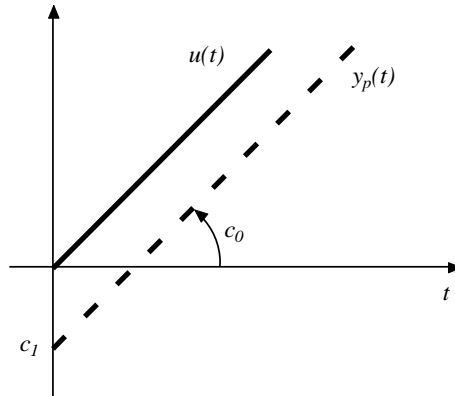


Fig. 2.2. Componenta permanentă a răspunsului unui sistem imita variația mărimii de intrare standard

Dacă dorim ca  $y$  să coincidă cu  $u$ , trebuie să avem grija ca  $c_1 = 0$  și  $c_0 = 1$ .

**Observație :**

Din relațiile de mai sus (2.10) sau (2.11) și din exemplificarea pentru  $r = 2$ , se poate trage concluzia că *regimul permanent este acel regim care imită comportarea mărimii de intrare standard*.

### 2.1.3 Răspunsul unui sistem la intrare armonică

Fie o intrare armonică:

$$u(t) = e^{j\omega t} \text{ cu } \mathcal{L}\{u(t)\} = u(s) = \frac{1}{s - j\omega} \quad (2.13)$$

Rezultă răspunsul unui sistem  $H(s)$ :

$$y(s) = H(s) \cdot u(s) = \frac{r(s)}{p(s)} \cdot \frac{1}{s - j\omega}$$

$$y(s) = \frac{a_0}{s - j\omega} + \frac{a_1}{s - p_1} + \dots + \frac{a_n}{s - p_n}$$

cu

$$a_0 = \frac{r(j\omega)}{p(j\omega)} = H(j\omega) \text{ și } a_i = \frac{r(p_i)}{(p_i - j\omega)p'(p_i)}; i = 1, 2, \dots, n$$

S-a făcut ipoteza de lucru că  $H(j\omega)$  este bine definit, adică  $p(j\omega) \neq 0$  și  $p(s)$  are toate rădăcinile simple.

Atunci:

$$y(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} + \sum_{i=1}^n a_i e^{p_i t} = y_p(t) + y_t(t) \quad (2.14)$$

unde  $H(j\omega)$  este transformata Fourier a funcției de transfer a sistemului.

Componenta permanentă va fi:

$$y_p(t) = H(j\omega)e^{j\omega t} \quad (2.15)$$

și întrucât

$$H(j\omega) = |H(j\omega)| \cdot e^{j \cdot \arg(H(j\omega))} = H(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

atunci (3.26) se retranscrie sub forma:

$$y_p(t) = H(\omega)e^{j[\omega t + \varphi(\omega)]} \quad (2.16)$$

Relația (2.16) ce ne arată că, dacă la intrare, se aplică un semnal armonic de pulsație  $\omega$ , la ieșire se obține un semnal de aceeași pulsație, defazat cu  $\varphi$  și modificat în amplitudine cu  $H(\omega)$ .

## 2.2 Funcția de transfer a unui sistem exprimată prin termeni tip. Răspunsul în timp a termenilor tip. Tipul și ordinul funcției de transfer. Repartiția poli - zerourilor funcție de transfer în planul $s$ [1, 2, 5, 21, 28]

Fie :

$$H(s) = \frac{y(s)}{u(s)} = \frac{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0}{s^q (a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0)} = \frac{b_0}{a_0} \cdot \frac{1 + \sum_{i=1}^n \frac{b_i}{b_0} s^i}{s^q \left( 1 + \sum_{j=1}^m \frac{a_j}{a_0} s^j \right)}$$

și factorizând polinoamele de la numărător și de la numitor în funcție de rădăcinile simple sau complexe și de ordinul de multiplicitate, obținem:

$$H(s) = \frac{K}{s^q} \cdot G(s) = \frac{K}{s^q} \cdot \frac{\prod_{i=1}^p (T_i s + 1) \prod_{j=1}^l (T_j^2 s^2 + T_j' s + 1)}{\prod_{k=1}^r (T_k s + 1) \prod_{l=1}^n (T_l^2 s^2 + T_l' s + 1)} \quad (2.17)$$

Cu

$K$  – factorul de amplificare al sistemului;

$T$  – constanta de timp.

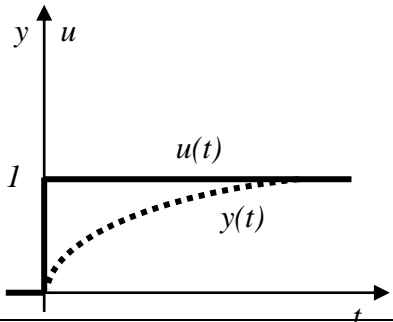
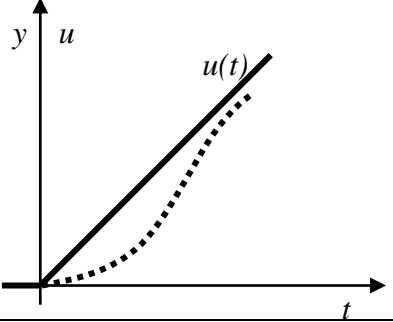
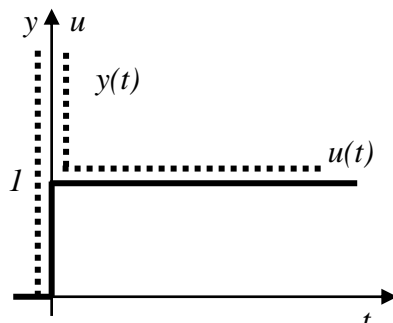
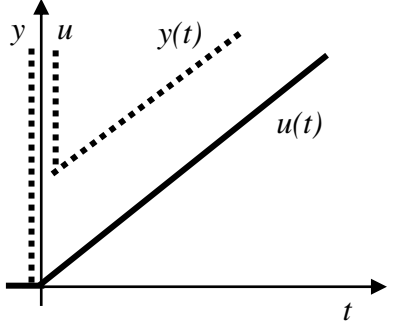
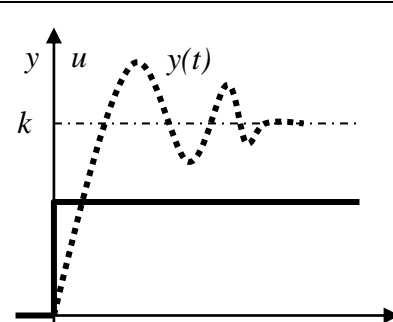
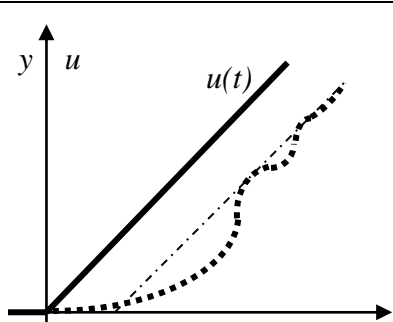
Se pun în evidență următorii termeni tip:

- Termen constant  $H_K(s) = K$
- Termen liber  $H_I(s) = \frac{1}{s}; H_D(s) = s$
- Termen liniar  $H_{Li}(s) = \frac{1}{Ts + 1}; H_{La}(s) = Ts + 1$
- Termen quadratic  $H_{Qi}(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + T' s + 1}; H_{Qa}(s) = T^2 s^2 + T' s + 1$

În tabela 2.1. se dau răspunsurile acestor termeni tip la intrări standard treaptă și rampă.

Tabela 2.1. Raspunsul în timp a termenilor tip

Nr crt	Denumirea termenului tip / Funcția de transfer	Răspunsul termenului	
		$I(t)$	$t$
0	1	2	3
1.	Termen constant $H_K(s) = K$		
2.	Termen liber la numărător $H_D(s) = s$		
3.	Termen liber la numitor $H_I(s) = \frac{1}{s}$		
4.	Termen liniar la numărător $H_{La}(s) = 1 + sT$		

Nr crt	Denumirea termenului tip / Funcția de transfer	Răspunsul termenului	
		$I(t)$	$t$
0	1	2	3
5.	Termen liniar la numitor $H_{Li}(s) = \frac{1}{1+sT}$		
6.	Termen quadratic la numărător $H_{Qa}(s) = T^2s^2 + 2\xi Ts + 1$		
7.	Termen quadratic la numitor $H_{Qi}(s) = \frac{1}{T^2s^2 + 2\xi Ts + 1}$		

**Observație:**

1. Se definește **tipul funcției de transfer** prin numărul polilor în origine ai funcției de transfer.
2. **Ordinul funcției de transfer** este dat de ordinul ecuației diferențiale din care s-a obținut prin transformata Laplace funcția de transfer. Deci pentru sisteme fizic realizabile,  $m > n$ , ordinul coincide cu gradul polinomului de la numitorul funcției de transfer.

Factorizarea (2.17) este interesantă prin faptul, că pune în evidență poziția zerourilor și polilor funcției de transfer în planul  $s$  - funcția de transfer nu conține timp mort – ceea ce ne permite să facem aprecieri asupra comportării dinamice a procesului (figura 2.3).

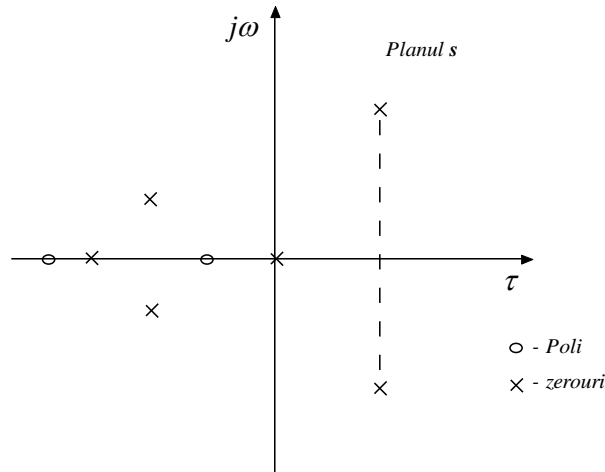


Fig. 2.3. Repartiția poli – zerouri pentru o funcție de transfer rațională

Repartiția poli – zerouri precum și factorul de amplificare  $K$  definește complet un sistem liniar invariant în timp fără timp mort.

## 2.3 Stabilitatea sistemelor liniare cu o intrare și o ieșire [1,28]

Se spune că un sistem fizic realizabil este stabil față de o situație de echilibru staționar, dacă sub acțiunea unei perturbații exterioare (impuls Dirac) își părăsește starea de echilibru stabil, tinzând să revină, după un timp finit (și perturbația a dispărut), într-o stare de echilibru staționar cu sau fără eroare staționară. Dacă acest lucru nu este realizat, în sensul că mărimea de ieșire are o variație cu amplitudine din ce în ce mai mare în timp (oscilant sau aperiodic), se spune că sistemul este instabil.

Se introduc două tipuri de stabilitate:

- stabilitate internă (sau în sens Liapunov);
- stabilitatea externă (sau de tip intrare mărginită - ieșire mărginită BIBO).

### • Stabilitate internă

Un sistem  $(A, b, c^T)$  este:

a) **stabil (intern)** dacă  $\exists M > 0$ , astfel încât  $\|e^{At}\| \leq M, \forall t \geq 0$

b) **asimptotic stabil (intern)** dacă  $e^{At} \rightarrow 0$ , când  $t \rightarrow \infty$

Se pot demonstra următoarele teoreme.

Un sistem  $(A, b, c^T)$  este:

- **intern stabil**, dacă și numai dacă valorile proprii ale matricei  $A$  are toate  $\text{Re } \lambda_i \notin 0$ , iar acele valori proprii care au partea reală nulă trebuie să fie rădăcini simple ale polinomului minimal.
- **intern asimptotic stabil**, dacă și numai dacă valorile proprii ale matricei  $A$  au  $\text{Re } \lambda_i < 0$ , aceasta condiție fiind echivalentă cu

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- \quad (2.13)$$



unde  $\sigma(A)$  este **spectrul matricei A**.

• **Stabilitate externă**

Un sistem  $(A, b, c^T)$  este:

- a) **stabil (extern)** dacă  $M > 0$  astfel încât  $|h(t)| \leq M, \forall t \geq 0$
- b) **strict stabil (extern)** dacă  $h(t) \rightarrow 0$  când  $t \rightarrow \infty$

Se pot demonstra următoarele teoreme.

Un sistem  $(A, b, c^T)$  este:

- **extern stabil**, dacă și numai dacă polii funcției de transfer au  $\text{Re } p_i \leq 0$  iar acei poli care au partea reală nulă trebuie să fie poli simpli.
- **extern strict stabil**, dacă și numai dacă polii funcției de transfer au  $\text{Re } p_i < 0$ , această condiție fiind echivalentă cu:

$$\mathcal{P}[H(s)] \subset \mathbb{C}^- \tag{2.14}$$

Se observă imediat ca **stabilitatea internă implică pe cea externă**

$$\sigma(A) \subset \mathbb{C}^- \Rightarrow \mathcal{P}[H(s)] \subset \mathbb{C}^- \tag{2.15}$$

Reciproca nu este adevărată (cu excepția cazului când forma primara a lui  $H(s)$  este introductibilă, fapt ce determină transformarea incluziunii în egalitate).

Se pune problema cum se poate aprecia stabilitatea fără a calcula efectiv rădăcinile polinomului caracteristic? Răspunsul la aceasta întrebare este dat de **criteriul Routh - Hurwitz**.

*Fie polinomul caracteristic:*

$$\chi_A(s) = c_0 s^n + c_1 s^{n-1} + \dots + c_n$$

*complet și cu toți coeficienții pozitivi.*

*Condiția necesară și suficientă ca radacinile lui  $\chi_A(s)$  să aibă partea reală strict negativă este ca toți determinanții principali ai matricei Hurwitz să fie strict pozitivi:*

$$\Delta H_n = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \dots & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & \dots & 0 \\ 0 & c_0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & \dots & \dots & \dots & c_n \end{vmatrix} > 0 \dots \quad \begin{matrix} \Delta H_1 = c_1 > 0 \\ \Delta H_2 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 \\ c_0 & c_2 \end{vmatrix} > 0 \end{matrix}$$

### 3 Sisteme de reglare automata

#### 3.1 Structura unui sistem de reglare automată (SRA). Funcția de transfer reprezentativă. Problema reglării

[1, 5, 14, 22, 28, 31]

Arătăm în primul capitol, că un sistem de reglare automată (SRA) poate fi reprezentat prin schema bloc din figura 3.1.

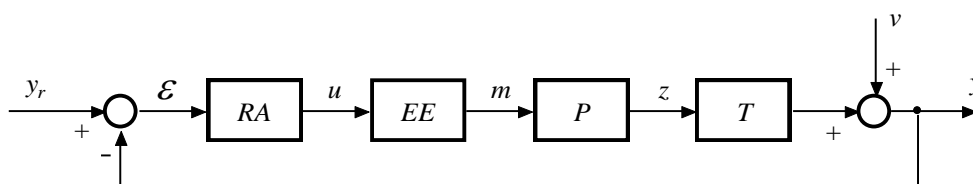


Fig. 3.1. Principalele subsisteme ale unui sistem de reglare automată.

**Sistemul de reglare automată (SRA)** este un sistem în conexiune inversă care își decide comportamentul față de mărimile externe (exogene) pe baza mărimii de eroare,  $\varepsilon$ , generate în mod automat, cu scopul expres al anulării acesteia. Acest lucru presupune cunoașterea a-priorică a modelului mărimilor externe, deci prezența în sistem a unei copii sub forma modelului intern.

Spre deosebire de SRA care își explicitează funcționalitatea prin anularea mărimii de eroare, **sistemele de conducere** prezintă funcții multiple și mai complexe, inclusiv cea de reglare automată. Aceste funcții sunt organizate într-o anumită ierarhie, în care funcția de reglare se află plasată la primul nivel, lângă proces, pe nivelele superioare aflându-se funcții, precum cele de: identificare, optimizare, etc.

SRA se pot clasifica după obiectivul final al funcției de reglare în:

- **sisteme de urmărire** (servosisteme): funcția de reglare are ca efect urmărirea cât mai fidelă de către mărimea de calitate  $z$  (sau mărimea reglată  $y$ ), a unei mărimi externe,  $y_r$ , mărimea de referință ;
- **sisteme de rejecție a perturbațiilor** (sisteme cu referință fixă): funcția de reglare are ca efect final menținerea constantă la o valoare prescrisă a lui  $z$  (sau  $y$ ), independent de perturbația  $v$ .

Îndeplinirea funcției de reglare nu se face numai pe seama mărimii de eroare, dar când este posibil, și pe baza măsurării directe a perturbațiilor, dacă acest lucru este posibil. Elaborarea comenzii în această variantă este interesantă, în special, în rejecția perturbațiilor, în așa numita reglare cu acțiune directă (feedforward).

#### □ Problema reglării

Fie sistemul:

$$\dot{x} = Ax + bu + ev \quad (3.1)$$

$$y = z = c^T x$$

cu  $H(s)$  funcția de transfer la comandă și  $H_v(s)$  funcția de transfer la perturbație.

Specificăm clasa mărimilor perturbatoare  $v$  și a celor de referință  $y_r$  prin elementele acestor clase:

$$v(s) = \frac{a_1(s)}{s^{\rho_1}}, \quad y_r(s) = \frac{a_2(s)}{s^{\rho_2}} \quad (3.2)$$

cu  $a_1(s)$  și  $a_2(s)$  polinoame cu  $\partial[a_1(s)] < \rho_1$ ,  $\partial[a_2(s)] < \rho_2$ .

$\mathcal{V} \cup \mathcal{Y}_r = \mathcal{E}$  reprezintă clasa mărimilor externe (exogene), asupra acestora făcându-se ipoteza de persistență, adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) \neq 0$ ;  $\lim_{t \rightarrow \infty} y_r(t) \neq 0$

Se introduce mărimea de eroare

$$\varepsilon_s \squareq y_r - y \quad (3.3)$$

unde  $y$  este acum mărimea reglată.

Se definește compensatorul după eroare prin:

$$p_c(s) \cdot u(s) = r_c(s) \cdot \varepsilon(s) \quad (3.4)$$

Problema reglării constă în determinarea compensatorului după eroare (3.4) a polinoamelor  $p_c(s)$  și  $r_c(s)$  astfel încât sistemul rezultat (3.1) + (3.3) + (3.4) cu structura în circuit închis (figura 3.2.) să posede simultan următoarele două proprietăți:

(S) *proprietatea de stabilitate a buclei de reglare;*

(R) *proprietatea de reglare, adică  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = 0$  pentru  $\forall y_r, v \in \mathcal{E}$*

Problema reglării poate fi reformulată și în termenii funcției de transfer:  $H(s)$  procesul (partea fixată) și  $H_c(s)$  compensatorul după eroare.

**Problematica generală a SRA constă deci în construirea unui compensator care să fie simultan stabilizator și regulator, deci care să confere sistemului în bucla închisă proprietățile (S) și (R).**

În aplicațiile concrete se impun SRA proprietăți suplimentare celor fundamentale, proprietăți suplimentare ce explicitează așa numita **calitate a procesului de reglare automată**. Această calitate este descrisă printr-o clasă de indici sintetici ce caracterizează performanțele SRA.

*Definirea indicilor de calitate, deci a performanțelor, și aprecierea lor într-o manieră inginerească reprezintă obiectul analizei SRA.* Metodologiile de analiză convenționale fac apel la comportamentul intrare/ieșire al SRA, deci la structura din figura 3.2.

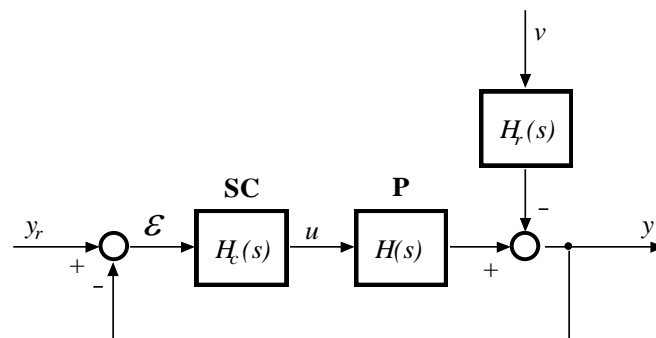


Fig.3.2. Schema funcțională bloc a unui SRA

Sunt puse în evidență următoarele subsisteme ale unui SRA: SC - compensatorul după eroare, P - procesul (constituit din element de execuție, procesul propriu-zis și traductor).

Reamintim de asemeni, că mărimile reprezentative ale unui SRA vor fi în consecință:  $\varepsilon$  - eroarea,  $u$  - comandă,  $m$  - mărimea de execuție,  $z$  - mărime de calitate,  $y$  - mărimea măsurată.

Se introduc următoarele funcții de transfer reprezentative:

- funcția de transfer în circuit deschis:

$$H_b(s) = \frac{y(s)}{\varepsilon(s)} = H_c(s) \cdot H(s) \quad (3.5)$$

- funcția de transfer în circuit închis

$$H_0(s) = \frac{y(s)}{y_r(s)} = \frac{H_b(s)}{1 + H_b(s)} \quad (3.6)$$

- funcția de transfer a erorii

$$H_\varepsilon(s) = \frac{\varepsilon(s)}{y_r(s)} = \frac{1}{1 + H_b(s)} \quad (3.7)$$

- funcția de transfer a perturbației

$$H_p(s) = \frac{y(s)}{v(s)} = \frac{1}{1 + H_b(s)} H_v(s) \quad (3.8)$$

## 3.2 Analiza SRA [5, 27, 28]

### 3.2.1 Considerații generale

Se fac ipotezele:

- $v(s) = 0$
- $y_r(s) = \frac{a(s)}{s^\rho}$ , cu mențiunea că  $\mathcal{E}$  constă din funcții treaptă, rampă, etc. pe canalul mărimii de referință.

Analiza SRA constă în aprecierea într-o manieră inginerescă a următoarelor performanțe:

- **stabilitatea (asimptotică internă) a SRA- (S);**
- **performanțele regimului dinamic (tranzitoriu);**
- **precizia SRA- (R);**
- **performanțele regimului staționar.**

Aprecierea acestor performanțe pentru sistemul în circuit închis se face pe baza specificațiilor sistemului în circuit deschis, adică ale lui  $H_b(s)$ .

### 3.2.2 Analiza stabilității

Stabilitatea fiind un indice global de calitate, care caracterizează în sensul cel mai larg performanțele unui sistem, trebuie testată înainte de a aprecia orice alt indicu de calitate.

Analiza stabilității constă în verificarea incluziunii  $\sigma \subset \square^-$  pentru sistemele netede.

Aprecierea stabilității se poate face direct prin criteriul Routh-Hurwitz sau apelând la analiza prin pulsație (frecvență) prin criteriile Nyquist și Bode.

### i) Criteriul de stabilitate Nyquist

Criteriul pornește de la observația că  $\sigma(A) = \mathcal{P}[H_0(s)] = \mathcal{Z}[1 + H_b(s)] \subset \mathbb{C}^-$  și deci un sistem cu reacție este asimptotic stabil (intern), dacă și numai dacă, în  $\mathbb{C}^+$  se găsesc cel mult polii raționalei  $1 + H_b(s)$ .

Acest lucru se poate constata inspectând semiplanul stâng a variabilei  $s$  ce a fost închis printr-un contur Nyquist (axa imaginară și un cerc de rază infinit mare). Când acest contur este parcurs în sens pozitiv, în planul funcției, funcția de transfer  $H(s)$  descrie locul de transfer. În raport cu punctul  $(-1, j0)$  din planul funcției, locul de transfer devine hodograful ecuației caracteristice  $1 + H_b(s) = 0$ .

#### Criteriul Nyquist generalizat precizează:

Condiția necesară și suficientă ca un SRA să fie stabil este ca locul de transfer a lui  $H_b(s)$  să înconjoare punctul critic  $(-1, j0)$  în sens antiorar de un număr de ori  $p$ , reprezentând polii lui  $1 + H_b(s)$  aflați în semiplanul drept al planului  $s$ , când  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ .

Dacă sistemul este stabil în circuit deschis, se poate aplica **criteriul Nyquist simplificat (practic)**:

Condiția necesară și suficientă ca un SRA să fie stabil este ca locul de transfer a lui  $H_b(s)$  să nu înconjoare punctul critic  $(-1, j0)$  când  $\omega \in (-\infty, +\infty)$ , sau

Condiția necesară și suficientă ca un SRA să fie stabil este ca hodograful lui  $H_b(s)$  să taie axa reală, în sensul crescător al pulsațiilor  $\omega \in [0, +\infty)$ , la dreapta punctului critic  $(-1, j0)$  (figura 3.3.a) sau să taie axa reală la stânga punctului critic  $(-1, j0)$  când  $\omega \in (0, \infty)$  (**regula "mărimii stângii"**).

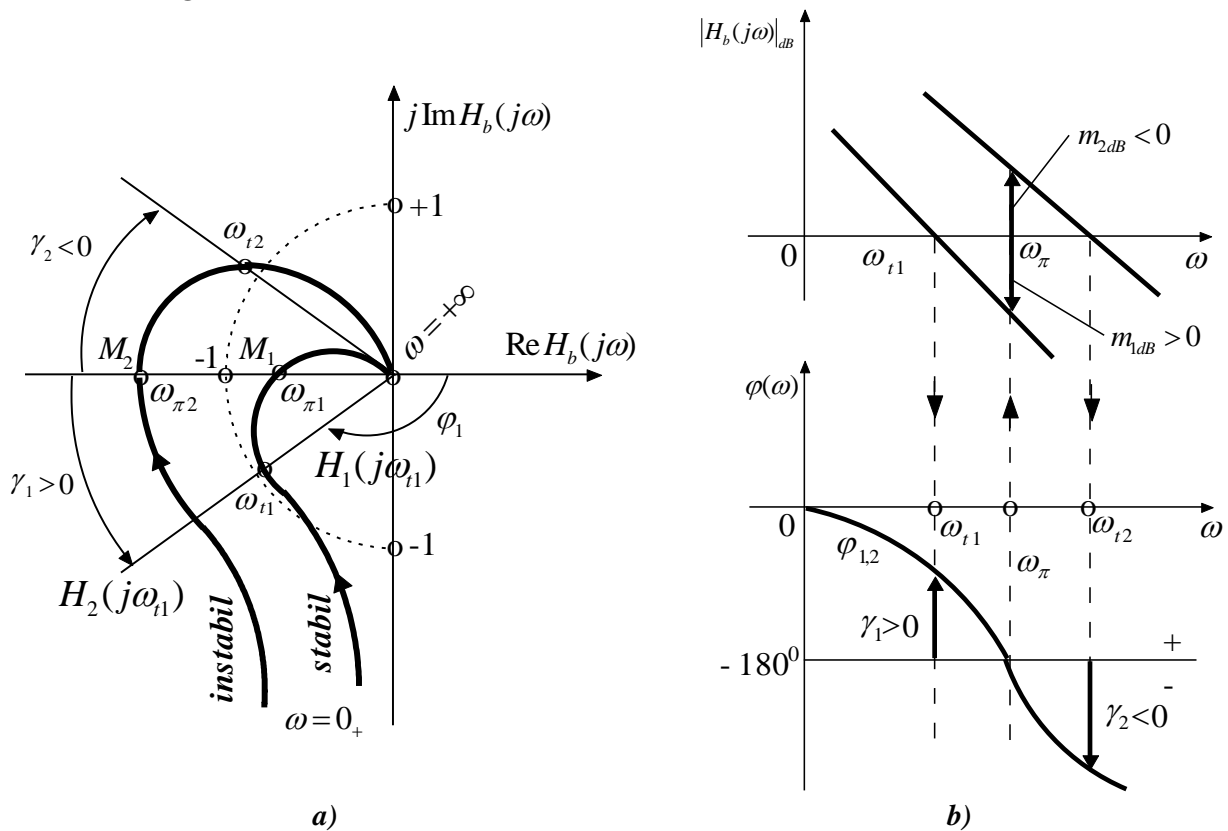


Fig.3.3. Rezerva de stabilitate

a) locul de transfer; b) caracteristicile semilogaritmice de frecvență

## ii) Criteriul de stabilitate Bode

Utilizând caracteristicile semilogaritmice de frecvență, stabilitatea se poate aprecia prin două mărimi:

- **marginea (câștigul) de amplitudine**

$$m \square \frac{1}{|H_b(j\omega_\pi)|}, \quad m_{dB} = -|H_b(j\omega_\pi)|_{dB} \quad (3.9)$$

- **marginea (câștigul) de fază**

$$\gamma \square 180^\circ + \varphi(\omega_t) \quad (3.10)$$

unde  $\omega_t$  este pulsația de tăiere ( $|H(j\omega)|=1$ ) iar  $\omega_\pi$  pulsația la care sistemul are o fază egală cu  $\pi$  (figura 3.3.b).

**Criteriul lui Bode** precizează:

*Condiția necesară și suficientă ca un SRA să fie stabil este ca marginea de amplitudine și marginea de fază să fie pozitive în situația în care caracteristicile semilogaritmice de frecvență ale sistemului deschis sunt monoton descrescătoare.*

Se observă că la **sistemele stabile**  $\omega_t < \omega_\pi$

Practica arată că stabilitatea internă se asigură pentru  $m \square 10 \div 20dB$  și  $\gamma \square 30^\circ \div 60^\circ$

### 3.2.3 Performanțele regimului dinamic

Performanțele regimului dinamic sunt descrise prin indici sintetici de calitate ce caracterizează răspunsul indicial al sistemului (figura 3.4).

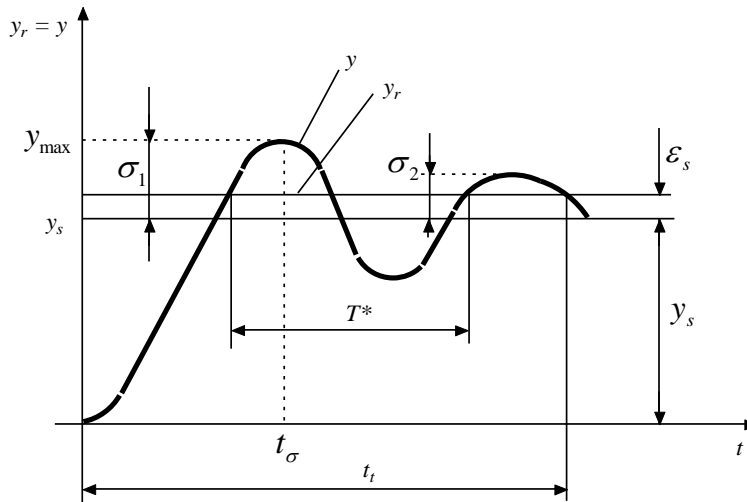


Fig.3.4. Performanțele regimului dinamic

Aceste performanțe sunt următoarele:

- **suprareglajul (supraurmărirea)  $\sigma$**  definită prin

$$\sigma \square \frac{y_{\max} - y_s}{y_s} = \sigma_1 \quad (3.11)$$

unde  $y_s$  reprezintă **valoarea staționară a mărimii de ieșire**, iar  $y_{\max}$  reprezintă valoarea primului maxim. Relația (3.11) poate fi exprimată și în procente.

-  **timpul primului maxim**   $t_{\sigma}$ , sau de atingere a abaterii maxime a mărimii de iesire în regim tranzitoriu;

-  **durata regimului tranzitoriu**   $t_t$  definită prin timpul ce se scurge din momentul aplicării excitației pe canalul de referință și până când ieșirea intră într-o bandă de  $\pm(2 \div 5)\% y_s$  :

$$|y(t) - y_s| \leq 0,02 y_s \text{ pentru } \forall t \geq t_t \quad (3.12)$$

-  **indicele de oscilație**   $\psi$  reprezintă variația relativă a amplitudinilor a două depășiri succesive de același semn a valorii de regim staționar.

$$\psi = \frac{S_1 - S_2}{S_1} = 1 - \frac{S_2}{S_1} = 1 - d \quad (3.13)$$

unde  $d$  este  **decrementul** :

- **perioada oscilațiilor**   $T^*$  pentru regimul oscilant amortizat;
- **numărul de oscilații**   $N$  dacă răspunsul traversează de un număr finit de ori componenta staționară.

Pe lângă acești indici de calitate principali se mai pot defini și alții, cum ar fi:

-  **timpul de stabilire** : momentul în care se atinge pentru prima dată valoarea staționară a ieșirii.

-  **timpul de creștere** : valoarea subtangentei dusă la  $y(t)$  la  $0,5 y_s$ , tangenta fiind limitată de axa  $t$  și de  $y_s$ .

### 3.2.4 Precizia SRA

Un SRA se numește  **precis**  relativ la mărimea de referință

$$y_r(s) = \frac{1}{s^\rho}, \quad \rho \geq 1 \quad (3.14)$$

dacă pentru  $y_r$  de tipul menționat mai sus și pentru  $v(t)=0$  avem

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$$

Dacă un sistem are funcția de transfer în circuit deschis

$$H_b(s) = \frac{K}{s^q} G(s)$$

cu  $G(0)=1$ , și  $q$  - tipul funcției de transfer, atunci evaluând relația (3.14) obținem:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s y_r(s) H_\varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^\rho} \cdot \frac{1}{1 + \frac{K}{s^q} G(s)} = \quad (3.15)$$

$$= \lim_{s \rightarrow 0} s^{q-\rho+1} \cdot \frac{1}{s^q + KG(s)}$$

Pentru ca această limită să tindă către zero este necesar ca  $q-\rho+1 \geq 1$  sau  $q \geq \rho$ .

Un sistem neted de reglare automată este  **precis la o referință**   $y_r(s) = \frac{1}{s^\rho}$ ,  $\rho \geq 1$

dacă și numai dacă funcția de transfer a sistemului în circuit deschis  $H_b(s)$  este de un tip cel puțin egal sau mai mare decât  $\rho$  sau, ceea ce este echivalent, dacă și numai dacă funcția de transfer a erorii  $H_\varepsilon(s)$  are în origine un zero cu ordinul de multiplicitate  $\geq \rho$ .

Rezultă că pentru ca un SRA să fie precis, îndeplinirea în fond a condiției (R), SRA trebuie să încorporeze o copie a modelului mărimilor exogene (externe) sub forma **modelului intern**.

**Observație:**

Fenomenul de reglare conține două elemente obligatorii: **conexiunea inversă și modelul intern**.

**3.2.5 Performanțele regimului staționar al erorii**

Calitatea regimului staționar este apreciată prin **eroarea staționară**:

$$\varepsilon_s = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s y_r(s) H_\varepsilon(s) \quad (3.16)$$

Să presupunem că sistemul este precis la  $y_r(s) = \frac{1}{s^\rho}$ .

Ne interesează să evaluăm (3.16) pentru  $y_r(s) = \frac{1}{s^{\rho+1}}$

$$\varepsilon_s = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{s^{\rho+1}} \frac{1}{1 + \frac{K}{s^\rho} G(s)} = \frac{1}{K} \quad (3.17)$$

Situația este ilustrată în figura 3.5. Se observă că  $\varepsilon_s$  coincide cu componenta permanentă a erorii.

*Eroarea staționară este invers proporțională cu factorul de amplificare a sistemului în circuit deschis, atunci când sistemul nu mai este precis.*

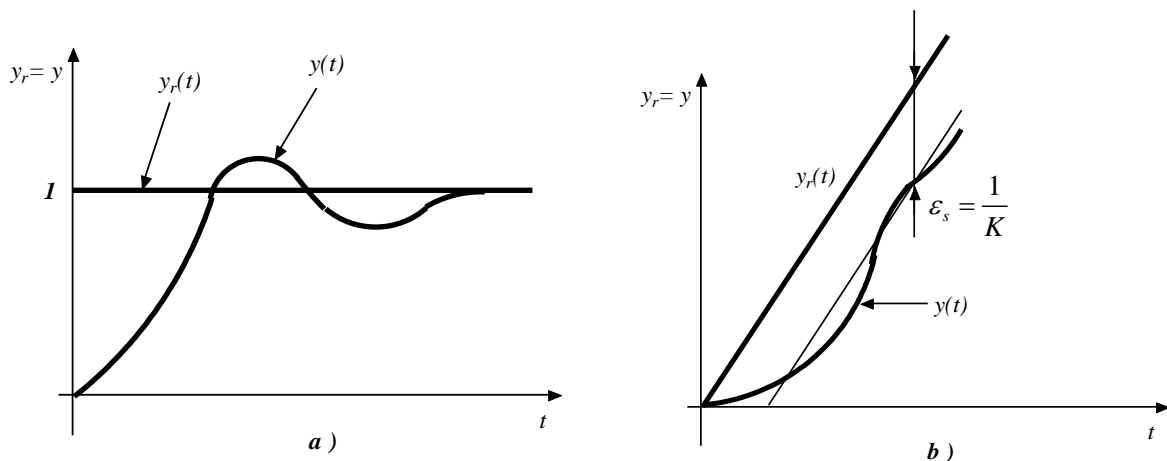


Fig.3.5. Evaluarea  $\varepsilon_s$  la un  $y_r(s) = \frac{1}{s^{\rho+1}}$  dacă SRA este precis la  $y_r(s) = \frac{1}{s^\rho}$



**Observație:**

Condiția de satisfacere a performanței staționare pe baza relației (3.17) este în contradicție cu îndeplinirea condiției de stabilitate.

Se definesc următorii coeficienți ai erorii staționare:

- coeficientul erorii de poziție  $K_p \stackrel{\Delta}{=} \lim_{s \rightarrow 0} H_b(s)$
- coeficientul erorii de viteză  $K_v \stackrel{\Delta}{=} \lim_{s \rightarrow 0} sH_b(s)$
- coeficientul erorii de accelerație  $K_a \stackrel{\Delta}{=} \lim_{s \rightarrow 0} s^2H_b(s)$

În tabela 3.1. se dă o evaluare a erorii staționare pentru principalele tipuri de  $H_b(s)$  și intrări standard.

*Tabela 3.1. Eroarea staționară a unui SRA la principalele intrări standard în funcție de tipul lui  $H_b(s)$*

$y_r(s)$ Tip $q$	$\frac{1}{s}$	$\frac{1}{s^3}$	$\frac{1}{s^3}$
0	$1/(1+K_p)$	$\infty$	$\infty$
1	0	$1/K_v$	$\infty$
2	0	0	$1/K_a$

## 4. Reglatoare [1,2,4,9,14,18,24,30]

### 4.1 Rolul și locul regulatorului automat într-un SRA. Clasificări.

Regulatorul automat (RA) este un subsistem al SRA care are rolul de a elabora legea de comandă pe baza mărimii de eroare cu scopul final de a o anula, cu alte cuvinte, de a îndeplini condiția de reglare (figura 4.1).

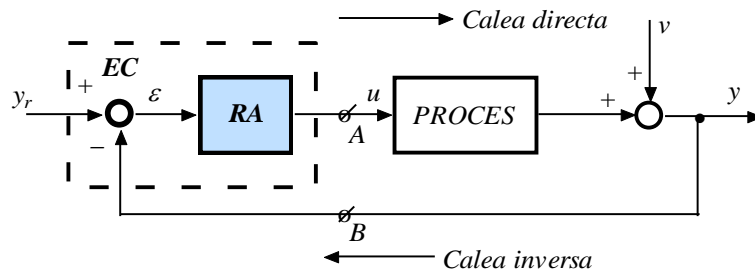


Fig. 4.1. Rolul și locul RA într-un SRA

Cele mai importante criterii pentru clasificarea reglatoarelor automate sunt date în figura 4.2:

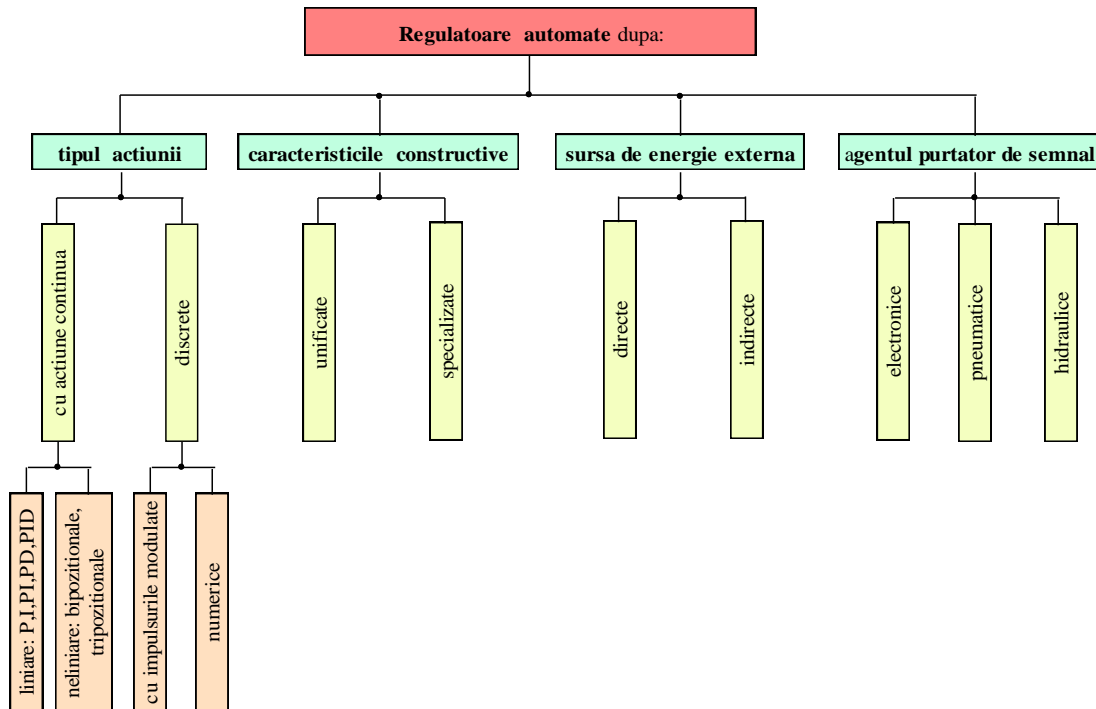


Fig.4.2. Criterii de clasificare pentru RA

După sursa de energie exterioară solicitată de reglatoare, RA se clasifică în:

- *reglatoare directe*, atunci când nu este necesară o sursă de energie exterioară, transmiterea semnalului realizându-se pe seama energiei din proces preluată de traductorul de reacție, și
- *reglatoare indirecte* care folosesc o sursă de energie exterioară. Reglatoarele indirecte realizează performanțe de reglare superioare celor directe.

După viteza de răspuns a procesului condus există:

- *reglatoare pentru procese rapide*, folosite pentru reglarea mărimilor din instalații tehnologice care au constante de timp mici (de ordinul secundelor)
- *reglatoare pentru procese lente*, pentru conducerea instalațiilor tehnologice cu constante mai mari de 10"

După structura constructivă, reglatoarele se clasifică în:

- *reglatoare specializate* sunt destinate în exclusivitate reglării unei singure mărimi specifice dintr-o instalație tehnologică, având o construcție specifică.
- *reglatoare unificate*, la care atât mărimile de intrare cât și mărimea de ieșire  $u$  au aceeași natură fizică și aceeași gamă de variație. Semnalele se numesc unificate, putând fi de tipul : 0,2 ...0,1 daN/cm<sup>2</sup>, 2 ...10 mA c.c., 1 ...5 mA c.c., 0 ...0,5 V c.a., pentru procese lente, și - 10...+10 V c.c., -5 ...+5 mA c.c., pentru procese rapide. Reglatoarele unificate au avantajul tipizării, al interschimbabilității (elementele componente pot fi conectate în mod diferit) și permit reglarea mărimilor de natură fizică diferită;

**Observație:** *SRA unificate* se bucură de o largă aplicabilitate în practica inginerescă.

Întrădevar, complexitatea și natura proceselor industriale fiind foarte diferită, versiunile de dispozitive de automatizări ar putea fi foarte largă.

O producție mare și ieftină de elemente de automatizare nu este posibilă decât prin introducerea unor elemente unificate, care interconectate să permită realizarea unui avantaj larg de structuri de reglare.

*Utilizarea unor astfel de structuri de reglare permite și o proiectare ușoară și un montaj rapid, proiectantul având doar rolul de a calcula un număr restrâns de parametri și de a alege echipamentul de reglare și de a acorda RA.*

i) După tipul acțiunii realizate, reglatoarele se clasifică în:

- *reglatoare cu acțiune continuă*, la care eroarea  $\varepsilon$  și comanda  $u$  variază continuu în timp. În funcție de legea de dependență între intrare și ieșire, reglatoarele pot fi liniare, sau neliniare. Reglatoarele continue liniare sunt de tipul  $P$ ,  $PI$ ,  $PID$ , etc., și cele neliniare pot fi bipoziționale sau tripoziționale;
- *reglatoare cu acțiune discretă* sunt acele reglatoare automate la care mărimea de ieșire  $u$  este formată într-o succesiune de impulsuri, mărimea de intrare (eroarea) fiind o mărime continuă. Impulsurile de la ieșirea blocului de reglare discretă pot fi modulate în amplitudine sau durată sau codificate, în acest caz regulatorul discret fiind de tip numeric.

ii) După agentul purtător de energie, există reglatoare:

- *electronice*, la care mărimile de intrare și de ieșire sunt de natură electrică (curenți sau tensiuni);
- *pneumatice*,  $u$  și  $\varepsilon$  sunt presiuni de aer;
- *hidraulice*, la care intrarea  $\varepsilon$  este o deplasare iar ieșirea  $u$  este presiunea unui lichid.

iii) După sensul mărimii de comandă " $u$ " în raport cu parametrul reglat " $y$ ":

- *cu acțiune directă* ( $\uparrow\uparrow$ ):  $y \uparrow \rightarrow u \uparrow$ ;
- *cu acțiune indirectă* ( $\uparrow\downarrow$ ):  $y \uparrow \rightarrow u \downarrow$ .

## **4.2 Elementele caracterizante ale unui RA**

Elementele care caracterizează un regulator automat și pe baza cărora se pot compara între ele diferitele regulatoare, în scopul alegerii celui mai adecvat tip, sunt următoarele:

- natura fizică a mărimii de intrare și ieșire;
- mediul în care vor lucra regulatoarele;
- gradul de complexitate al procesului și performanțele ce se impun mărimii reglate. În general, pentru majoritatea proceselor, legile de reglare P, PI, PD sau PID sunt satisfăcătoare, dar există procese la care se impun, datorită strategiilor complexe de conducere, regulatoare cu structuri speciale, cum ar fi cele de tip extremal, adaptiv etc. Astfel de structuri se realizează, însă, de cele mai multe ori, cu structuri numerice;
- posibilitățile de integrare în sisteme numerice complexe de conducere (calculatoare de proces);
- parametrii legii de reglare : constanta de timp de integrare  $T_I$ , constante de timp de derivare  $T_D$ , banda de proporționalitate  $BP$  ;
- transferul funcționării «automat-manual» și invers, fără șoc și fără echilibrare prealabilă;
- viteza de răspuns a procesului automatizat (proces rapid sau lent);
- numărul de elemente de execuție ce pot fi comandate simultan, în paralel, de către un regulator;
- tipul elementului de acționare;
- tipul organului de reglare (normal închis sau normal deschis);
- caracteristica statică a organului de reglare;
- realizarea siguranței în funcționare a procesului la întreruperea semnalelor de măsură și de comandă.

Problema alegerii tipului de regulator automat fiind o problemă importantă, asupra ei vom reveni într-un paragraf ulterior.

### **4.2.3. Regulatoare continue**

#### **i) Regulatoare continue liniare**

##### **a. Regulatoare liniare standard**

Realizarea tehnică a unui regulator urmărește elaborarea mărimii de eroare, ca și prelucrarea mai departe a acesteia pentru obținerea mărimii de comandă  $u(t)$  de la ieșirea regulatorului sau direct a mărimii de execuție  $m(t)$ , dacă regulatorul și elementul de execuție formează un singur echipament.

Tipurile de regulatoare cele mai utilizate astăzi în industrie sunt regulatoare standard, a căror comportare se poate explica prin cele trei forme de bază idealizate ale elementelor  $P$ ,  $I$  și  $D$ . Regulatorul standard cel mai important și cel mai complex are o comportare  $PID$ . Modul de acțiune al unui regulator  $PID$  poate fi explicat printr-o schemă de conectare în paralel a câte unui element  $P$ ,  $I$  și  $D$  (figura 4.3).

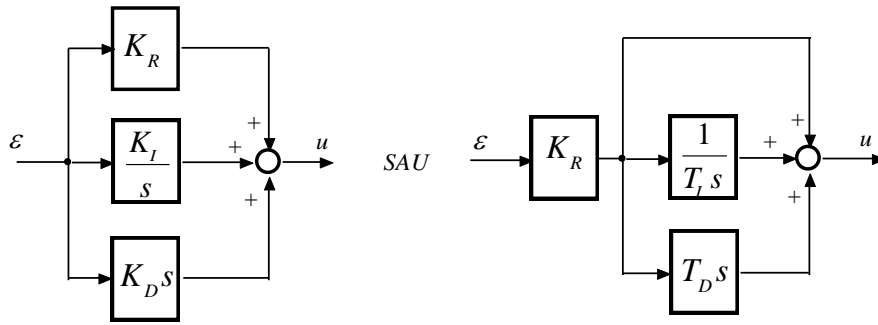


Fig. 4.3. Scheme bloc echivalente pentru un regulator PID

Din această reprezentare rezultă că funcția de transfer pentru un regulator *PID* are expresia:

Introducem mărimile

$K_R = K_p$  – factorul de amplificare al RA;

$$H_R(s) = \frac{u(s)}{\varepsilon(s)} = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D s \quad (4.1)$$

$T_I = \frac{K_p}{K_I}$  – timpul de integrare sau timpul de întârziere;

$T_D = \frac{K_D}{K_p}$  - timpul de derivare sau timpul de anticipare.

Prin introducerea factorului de amplificare  $K_R$ , o mărime adimensională, și a celor două constante de timp  $T_I$  și  $T_D$ , expresia (4.1) capătă o altă formă:

$$H_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right) \quad (4.2)$$

Aceste trei mărimi  $K_R$ ,  $T_I$  și  $T_D$  sunt în mod obișnuit ajustabile într-un domeniu determinat: ele sunt desemnate de aceea ca *parametrii de acord* (ajustabili) ai regulatorului. Prin alegerea corespunzătoare a valorii parametrilor de acord se poate realiza adaptarea unui regulator la procesul condus, astfel încât să rezulte cea mai bună comportare a buclei de reglare. Din (4.2) rezultă că evoluția în timp a mărimii de comandă este următoarea:

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) + \frac{K_R}{T_I} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau + K_R T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (4.3)$$

Prin această expresie putem evalua modificarea lui  $u(t)$  la un salt sub formă de treaptă:  $\varepsilon(t) = \mathbf{1}(t)$ , deci răspunsul indicial al regulatorului *PID* (figura 4.4).

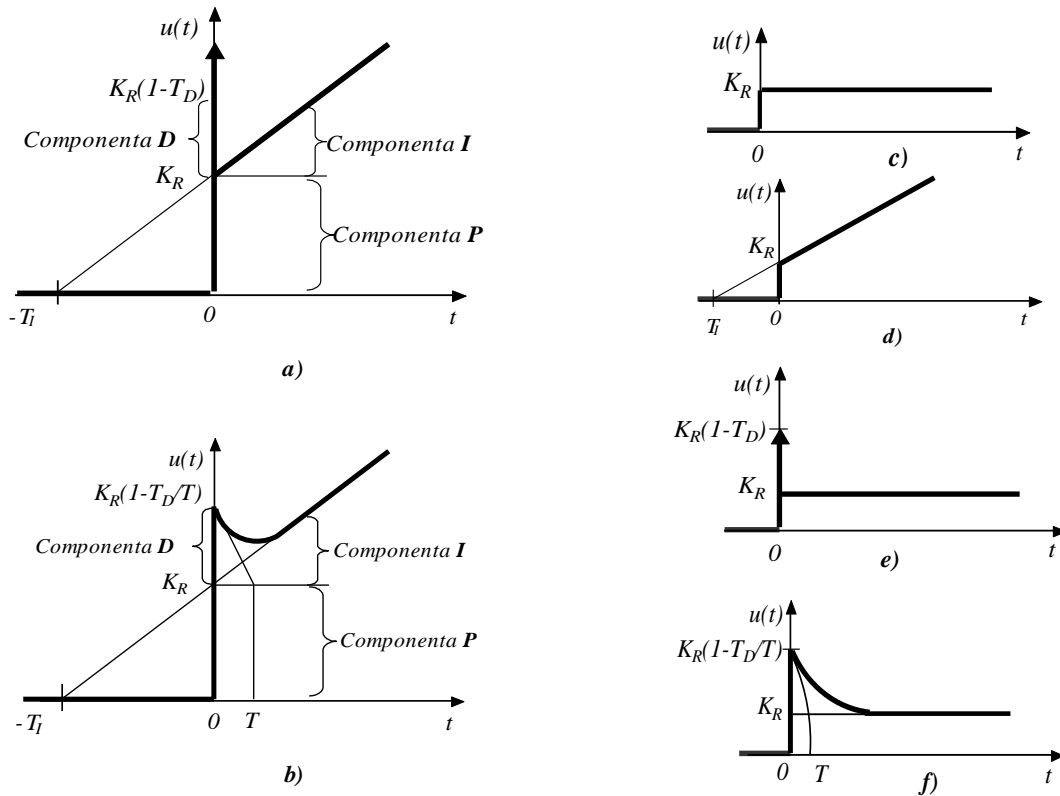


Fig.4.4. Răspunsul indicial a)ideal; b)real al unui RA de tip PID.  
 Răspunsul indicial pentru un RA de tip c) P, d) PI, e) PD (ideal) și f) PDT<sub>1</sub> (PD real)

Saltul realizat în răspunsul regulatorului se datorește componentei D din legea de reglare PID. Comportarea D ideală însă nu poate fi realizată practic. În cazul regulatorului ideal, comportarea D prezintă o întârziere, astfel că în loc de elementul D din schema bloc din figura 4.3 trebuie să se considere că avem un element DT<sub>1</sub> (derivată cu întârziere de ordinul unu), cu funcția de transfer

$$H_D(s) = K_D \frac{T_S}{1 + T_S} \quad (4.4)$$

Cu aceasta funcția de transfer a unui regulator PID real sau mai precis a unui regulator PIDT<sub>1</sub>, este

$$H_R(s) = K_p + \frac{K_I}{s} + K_D \frac{T_S}{1 + T_S} \quad (4.5)$$

sau introducând parametrii de acord  $K_R = K_p$ ,  $T_I = K_R / K_I$  și  $T_D = K_D T / K_R$  obținem

$$H_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D \frac{s}{1 + T_S} \right) \quad (4.6)$$

Răspunsul indicial al unui regulator de tip PIDT<sub>1</sub> este reprezentat în figura 4.4 a.

Menționăm următoarele cazuri particulare pentru un regulator PID:

a)  $T_D = 0$  corespunde unui regulator PI cu funcția de transfer

$$H_R(s) = K_R \left( 1 + \frac{1}{T_I s} \right); \quad (4.7)$$

b)  $T_I \rightarrow \infty$  corespunde unui regulator  $PD$  cu funcția de transfer

$$H_R(s) = K_R(1 + T_D s) \quad (4.8)$$

respectiv unui regulator  $PDT_1$ , cu funcția de transfer

$$H_R(s) = K_R \left( 1 + T_D \frac{s}{1 + T_I s} \right); \quad (4.9)$$

Pentru  $T_D = 0$  și  $T_I \rightarrow \infty$  obținem un regulator  $P$  cu funcția de transfer

$$H_R(s) = K_R. \quad (4.10)$$

Răspunsurile indiciale ale acestor tipuri de reglatoare sunt reprezentate în fig.4.4 c, d, e, f.

Pe lângă tipurile de reglatoare mai sus tratate ce se obțin dintr-un regulator  $PID$  (regulator ideal) prin alegerea corespunzătoare a parametrilor de acord, adesea se utilizează un regulator  $I$  pur a cărui funcție de transfer este:

$$H_R(s) = K_I \frac{1}{s} = \frac{K_R}{T_I s} \quad (4.11)$$

Reamintim că elementul  $D$  nu poate fi utilizat izolat, ci în combinație cu elementele  $P$  la reglatoarele  $PD$  și  $PID$ .

#### Observații:

1. Menționăm că  $RA$  continue liniare realizează o dependență intrare - ieșire de tip continuu, cea mai complicată expresia; legii de reglare ideală fiind legea  $PID$ :

$$u(t) = K_R \left[ \underbrace{\varepsilon(t)}_P + \underbrace{\frac{1}{T_I} \int \varepsilon(t) dt}_I + \underbrace{T_D \frac{d\varepsilon(t)}{dt}}_D \right] \quad (4.12)$$

Din relația de mai sus putem să definim parametrii legii de reglare (comandă), care sunt în același timp și parametrii pentru regulator:

**$K_R$  – factorul de amplificare** exprimat prin banda de proporționalitate  $BP$ .

$$BP\% = \frac{100}{k_R} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{u}} = \frac{100}{k_R} \quad (4.13)$$

unde  $\bar{\varepsilon}$  și  $\bar{u}$  sunt domeniul de variație a lui  $\varepsilon$  și  $u$ . Pentru reglatoarele unificate avem  $\bar{\varepsilon} = \bar{u}$ .

**Banda de proporționalitate BP** poate fi definită ca variație procentuală a mărimii de intrare necesară pentru a produce o variație de 100% a mărimii de ieșire a regulatorului.

**$T_I$  – constantă de timp de integrare** care definește componenta integrală și care are semnificația timpului în secunde sau minute necesar integratorului pentru a dubla răspunsul proporțional original corespunzător unei perturbații a procesului sau ceea ce este echivalent, numărul de secunde (minute) necesar pentru repetarea răspunsului proporțional (*MPR: minute până la repetare*, revenire sau egalare). *MPR* este echivalent cu  $T_I$ .

Unii fabricanți de aparatură măsoară comportarea integrală prin viteza de integrare (rata de integrare sau revenire/minut)  $RPM$ , cu observația că,  $RPM = 1/MPR$  (figura 4.5).

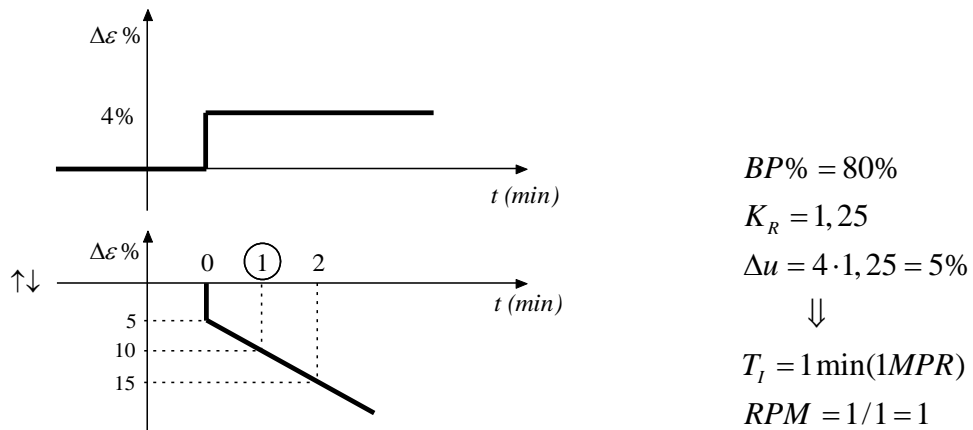


Fig.4.5. Interpretarea fizică a constantei de integrare  $T_I$

**$T_D$  – constanta de timp de derivare:** interpretarea fizică a acestei constante este ca răspunsul reglajului derivativ va fi egal cu cel al reglajului proporțional ce va apare după un timp  $T_D$  minute (secunde) și se va aplica imediat la ieșire (real după o mică întârziere) (figura 4.5).

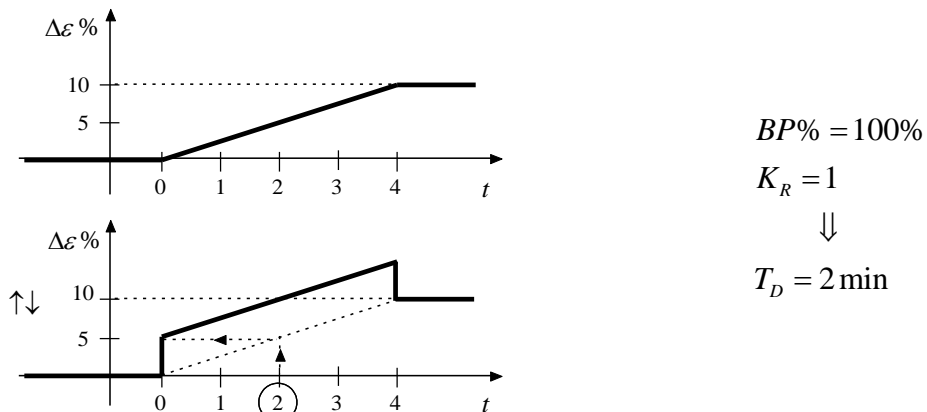


Fig.4.6. Interpretarea fizică a constantei de derivare  $T_D$

Un regulator automat este constituit din mai multe subsisteme, principale fiind elementul de comparație și subsistemul care realizează legea de reglare.

- Comparatorul cel mai simplu al unui regulator este dat în figura 4.6.a, mărimile de comparație fiind semnale în curent. Aceste semnale sunt convertite în tensiuni. Comparatorul permite determinarea mărimii și sensului erorii: în fig.4.7 se dă o schemă mai completă care cuprinde și un comutator al modului de acțiune direct ( $\uparrow\uparrow$ ) sau invers ( $\uparrow\downarrow$ )  $CD/I$ . Alegerea tipului de acțiune este dictată, în general, de tipul organului de reglare.

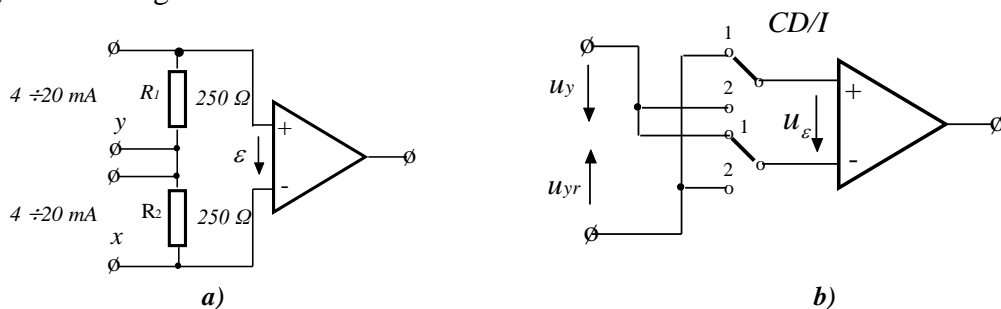


Fig.4.7. Element de comparație

a) element de comparație simplu; b) element de comparație și comutator al acțiunii direct-invers



- Blocul de reglare este realizat cu ajutorul unui amplificator, de obicei amplificator operațional, prevăzut cu circuite specifice pe reacție și intrare pentru a se realiza legea de comandă dorită.

Răspunsurile indiciale ideale și reale ale reguletoarelor de tip  $P$ ,  $PI$ ,  $PD$ , și  $PID$  sunt date în tabela nr.4.1

Tabela 4.1 : Raspunsurile indiciale ale reguletoarelor continue liniare

Legea de comandă ideală	Răspunsul ideal	Răspunsul real
<p style="text-align: center;">(P)</p> $\varepsilon(t) u(t) = K_R \cdot \varepsilon(t)$		
<p style="text-align: center;">(PI)</p> $u(t) = K_R \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(t) dt \right]$		
<p style="text-align: center;">(PD)</p> $u(t) = K_R \left[ \varepsilon(t) + T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$		
<p style="text-align: center;">(PID)</p> $u(t) = \left[ \varepsilon(t) + \frac{1}{T_i} \int \varepsilon(t) dt + T_D \cdot \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \right]$		

## 2. Considerăm pentru simplitate un RA de tip P.

Din relația

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) \tag{4.14}$$

rezultă că dacă  $y_r = y$  atunci  $\varepsilon = 0$ .

Într-un sistem dinamic parametrul reglat nu poate atinge valoarea zero și de aceea relația (4.14) se completează cu un termen de polarizare care produce o anumită valoare pentru semnalul de comandă, chiar dacă  $\varepsilon = 0$ .

$$u(t) = K_R \varepsilon(t) + b \tag{4.15}$$

Termenul de polarizare se ia frecvent egal cu 50% din mărimea de comandă. Deci, mărimea de comandă la un regulator  $P$  trebuie să fie egală cu 50% atunci când  $y = y_r$ , independent de amplificarea regulatorului.

3. Prezența componentei  $I$  conduce la o valoare a comenzii care va ieși din plaja de reglaj, apărând așa-numitul **fenomen de saturație**. Pentru a evita saturația este nevoie ca  $y$  să-și

schimbe sensul de variație înainte ca  $u$  să înceapă să varieze spre plaja de reglare. Este necesar să se ia o serie de măsuri de antisaturare deoarece o funcționare în aceste condiții este similară cu funcționarea bipozitională. Măsura cea mai simplă este alegerea corespunzătoare a constantei  $T_I$ .

## Bibliografie

1. Iliescu, S., St. - Cursul 136 – IPB, Litografie IPB, București, 1989.
2. Mihoc, D.,  
Iliescu S., St. - Teoria și elementele sistemelor de reglare automată, EDP, București, 1984.
3. Hütte - Manualul inginerului. Fundamente. Tradus din limba germană după ediția a 29-a, ET, București, 1995.
4. Oppel, W. - Tehnica reglării automate, ET București, 1965.
5. Isermann, R. - Regelungstechnik I, Shaker Verlag, Aachen, 2002.
6. Isermann, R. - Aufgabensammlung zur Vorlesung Regelungstechnik I. Ausgabe WS 2002/2003. Skript, TU Darmstedt, Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung, Darmstadt, 2002.
7. Isermann, R. - Identifikation dynamischer Systeme 1, Springer Verlag, Berlin, 1992.
8. Isermann, R. - Dynamik mechatronischer Systeme. Modellbildung und Synthese 1994. Skript, TU Darmstedt, Institut für Automatisierungstechnik, Fachgebiet Regelungstechnik und Prozeßautomatisierung, Darmstadt, 1994.
9. Isermann, R. - Mechatronische Systeme. Gnrudlagen, Springer Verlag, Berlin 1999.
10. Föllinger, O. - Regelungstechnik. Einfrihsung in die Methoden und ihre Anwendung, Hüthig Buch Verlag, Heidelberg 1994.
11. Kopelovici, A., P. - Sisteme de reglare automată. Metode de calcul ingineresti, ET, București 1963.
12. Grässler, R (editor),  
Birnstiel, H., ș.a. - Lehrbuch der Automatisierungstechnik, VEB Verlag Technik, Berlin 1966.
13. Voicu, M. - Introducere în automatică, Ed. Polirom, Iași, 2002.
14. Dumitrache, I. - Ingineria reglării automate, Ed. POLITEHNICA Press, București, 2005.
15. Dănilă, N., ș. a. - Centrale nucleare electrice. Probleme, EDP, București, 1980.

16. Tănăsescu, Nasta - Modelarea matematică și simularea numerică a proceselor tehnologice din industria alimentară, Matrix Rom, București, 2000.
17. Tănăsescu, Nasta - Identificarea sistemelor cu parametri distribuiți, Matrix Rom, București, 2000.
18. Carabogdan, I., Ghe. și Dănilă, N (conducători științifici) - Cursurile 136, 236, 336, PI 136 (traduceri), Lit. IPB, 1987/1988.
19. Eykhoff, P. - Identificarea sistemelor, ET București, 1977.
20. Göldner, K. - Mathematische Grundlagen für Regelungstechniker, VEB Fachbuchverlag, Leipzig, 1970.
21. Savant, C., J. - Calculul sistemelor automate, ET, București, 1967.
22. Șerban, S. - Sisteme de reglare automată, Ed. Printech, București, 2004.
23. Papadache - Automatica aplicată, ET, București, 1971
24. Iliescu, S., St. - Chestionar la cursul 136 – IPB, Litografia IPB, 1989
25. Levine, W., S. - The control handbook, CRC Press. Inc., N.Y., 1995
26. Zacher, S. - Duale Regelungstechnik, VDE Verlag GmbH, Berlin Offenbach, 2003
27. Samal, E., Becker, W. - Grundriß der praktischen Regelungstechnik, 21. Auflage, Oldenbourg Verlag München, Wien, 2004
28. Ionescu, Vl. - Teoria sistemelor. Sisteme liniare, EDP, București, 1985
29. Besekerski, V., A. s.a. - Teoria reglării automate. Culegere de probleme, ET, București, 1964
30. Iliescu, St., S., Făgărăsan, Ioana - Automatizarea centralelor termoelectrice, Ed. Printech, București, 2005
31. Unbehauen, H. - Regelungstechnik I, 12. Auflage, Vieweg Verlag Braunschweig / Wiesbaden, 2002